

Дәріс 5

Сигнал түрлендірулері

Сигнал түрлендірулері — бұл сигналдарды талдау, беру, сақтау немесе өңдеу мақсатында олардың бір пішіннен екінші пішінге ауысуы. Бұл түрлендірулер байланыс жүйелері мен ақпаратты өңдеуде өте маңызды рөл атқарады.

Сигнал түрлендірулерінің түрлері:

1. **Уақыт бойынша ығыстыру (Time shift)**

Формула: $x(t - t_0)$, оңға немесе солға ығысады.

2. **Уақыт масштабтау (Time scaling)**

Формула: $x(at)$, $|a| > 1$: сигнал сығылады. $0 < |a| < 1$: сигнал созылады. $a < 0$: уақыт бойынша айналады.

3. **Амплитудалық масштабтау (Amplitude scaling)**

Формула: $A \cdot x(t)$, Амплитуданы арттырады/азайтады.

4. **Айналық бейне (Time reversal)**

Формула: $x(-t)$, Уақыт бойынша айналады (кері бағытта).

5. **Жиілікке ауысу (Frequency shift)**

Формула: $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, Спектрді басқа жиілікке жылжытады.

6. **Модуляция (Modulation)**

Түрлері: Амплитудалық модуляция (AM), Жиілік модуляциясы (FM), Фаза модуляциясы (PM)

7. **Дискреттеу (Discretization)**

Формула: $x[n] = x(nT)$, Үздіксіз сигналды дискреттіге ауыстыру (уақытша өлшеу).

8. **Кванттау (Quantization)**

Амплитуда мәндерін шектеулі деңгейлерге дөңгелектеу.

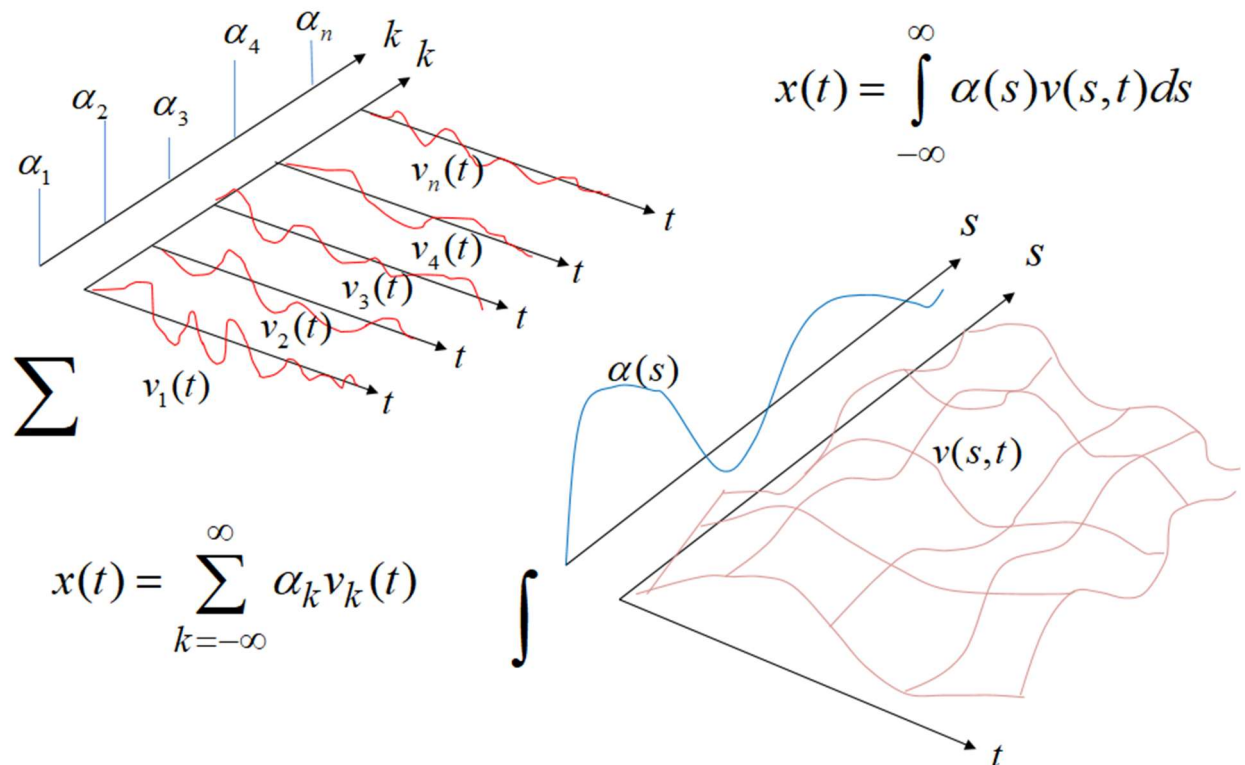
9. **Цифрландыру (Digitization)**

Дискретизация + кванттау = цифрлық сигнал алу.

10. **Фурье түрлендіру (Fourier Transform)**

Формула: $X(f) = \int x(t)e^{-j2\pi ft} dt$, Сигналды жиіліктік аймаққа ауыстыру.

Сигналдардың дискретті және үздіксіз көрінісі



Олардың Фурье түрлендіруі

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{тура}) \text{ Фурье түрлендіруі}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{кері Фурье түрлендіруі}$$

Рэлей жалпылама формуласы

Рэлей жалпылама формуласы екі сигналдың скалярлық көбейтіндісінен шығады:

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) e^{j2\pi\varphi t} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(f) e^{-j2\pi ft} df dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) Y^*(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\varphi-f)t} dt df d\varphi = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) Y^*(f) \delta(\varphi-f) df d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \\
\text{Сонымен, } &\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df
\end{aligned}$$

Парсеваль теңдігі

$$y(t) = x(t) \quad \text{кезінде аламыз}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Өрнектердің сол және оң жақ бөліктерінің симметриялы түрі мынаны ұсынуы керек:

Уақытша сигнал берудің «табиғи» уақытша көрінісі - бұл белгілі бір өзін-өзі көрсететін ядро көрінісі!

Мысалы.

Сигналдар кеңістігі үшін $L(-\infty, \infty)$ өзегі

$$u(t, \tau) = \delta(t - \tau) \quad s \rightarrow \tau$$

Спектрлік тығыздығы $\alpha(s) \rightarrow x(\tau)$

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt \quad \text{және керісінше}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Сигналдың динамикалық көрінісігімен сәйкес келетін бұл өрнек сигналдың әдеттегі уақытша көрінісін негізгі ядродағы интегралды (спектрлік) деп санауға болатындығын нақты көрсетеді $\delta(t - \tau)$

Гильберт түрлендіруі

$$u(t, \tau) = \frac{1}{\pi(\tau - t)} \quad s \rightarrow \tau$$

Спектрлік тығыздығы $\alpha(s) \rightarrow \hat{x}(\tau)$

$$\hat{x}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\tau - t} dt \quad \text{Тура}$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad \text{Кері түрлендіру}$$

Бұл Гильберттің түрлендірулері (тура және кері), атап айтқанда, тар жолақты детерминистік және кездейсоқ дірілдерді сипаттау үшін қолданылады.

Келесі кестеде сигнал және соған сәйкес Гильберт түрлендіруі келтірілген.

Сигнал	Гильберт түрлендіруі
$u(t)$	$H(u)(t)$
КОНСТАНТА	0
$\sin \omega t$	$\operatorname{sgn}(\omega) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sgn}(\omega) \cos \omega t$
$\cos \omega t$	$\operatorname{sgn}(\omega) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sgn}(\omega) \sin \omega t$
$e^{i\omega t}$	$\operatorname{sgn}(\omega) e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = -i \cdot \operatorname{sgn}(\omega) e^{i\omega t}$
$\frac{1}{t^2 + 1}$	$\frac{t}{t^2 + 1}$
e^{-t^2}	$2\pi^{-1/2} F(t)$ ($F(t)$ — интеграл Доусона)
Sinc $\frac{\sin t}{t}$	$\frac{1 - \cos t}{t}$

Детерминистік сигналдардың корреляция және спектрлік сипаттамалары арасындағы байланыс

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(f) Y^*(f)}_{W_{xy}(f)} df$$

$$W_{xy}(f) = X(f) Y^*(f) \quad \text{Өзара спектрлік тығыздық}$$

$$W_x(f) = |X(f)|^2 \quad \text{Энергия сигналының спектрі (спектрлік энергия тығыздығы)}$$

$$E_x = (x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) df$$

Өзара спектрлік тығыздық фурьенің кері түрлендіруі

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \underbrace{Y^*(f) e^{j2\pi f\tau}}_{Y_{\tau}^*(f)} df$$

$$Y^*(f) e^{j2\pi f\tau} = Y_{\tau}^*(f)$$

$$Y_{\tau}(f) = Y(f) e^{-j2\pi f\tau} \quad \longrightarrow \quad \text{Ығысу теоремасы}$$

$$B_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y_{\tau}^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt = (x, y_{\tau})$$

өзара корреляциялық функция

Сол сияқты

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X_{\tau}^*(f) df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = (x, x_{\tau})$$

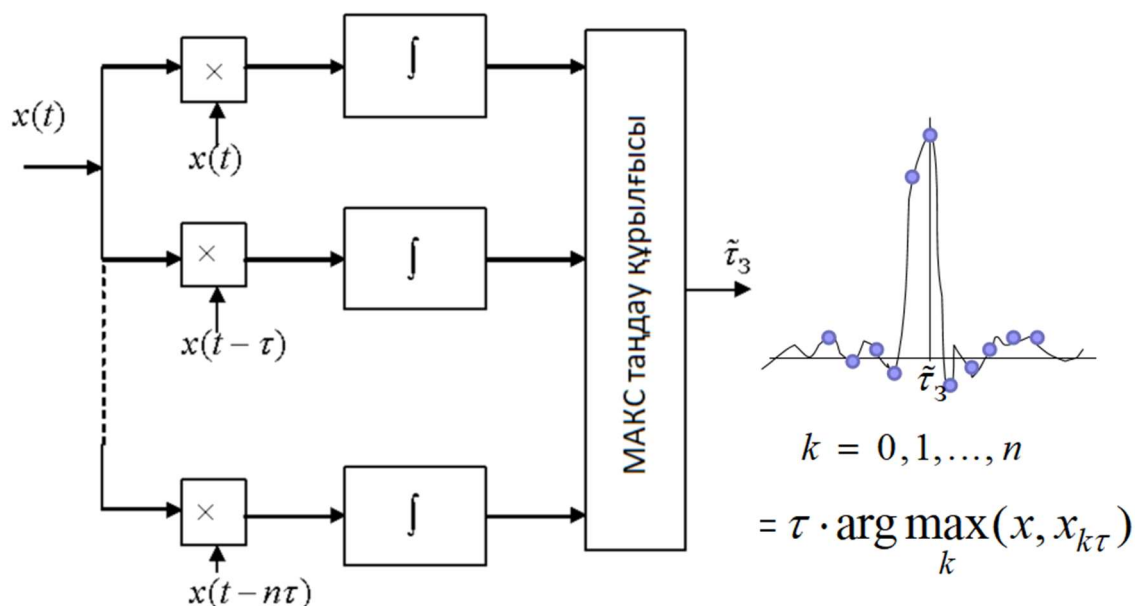
Бұл әрине автокорреляциялық функция өрнегі болып табылады.

Автокорреляциялық функцияның қасиеттері

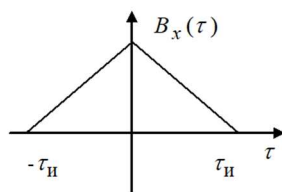
- Кешігуге қатысты жұп функция:
 $B_{xx}(\tau) = B_{xx}(-\tau)$ — Автокорреляция функциясы симметриялы болады.
- Максималды мәні нөлдік кешігуде:
 $B_{xx}(0)$ — сигнал қуатының орташа мәні;
 $B_{xx}(\tau) \leq B_{xx}(0)$.

- Стационарлы сигнал үшін тек τ -ға тәуелді:
 $B_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$.
- Тұрақты сигнал үшін автокорреляция функциясы де тұрақты:
Егер $x(t) = A$, онда $B_{xx}(\tau) = A^2$.
- Автокорреляция мен спектр арасындағы байланыс (Винер-Хинчин теоремасы):
 $X_{xx}(f) = \mathcal{F}\{B_{xx}(\tau)\}$ — Фурье түрлендіруі.
- Энергиялы сигнал үшін интеграл түрінде:
 $B_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt$.
- Шу сигналы үшін:
Ақ шу үшін $B_{xx}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$ — тек нөлдік кешікте мәні бар (δ — Дирак функциясы).

АКФ және ӨКФ қолданылу мысалы

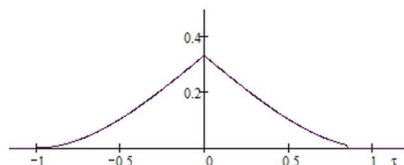
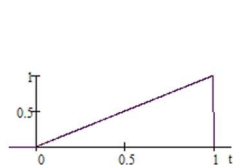


Тікбұрышты сигналдың АКФ



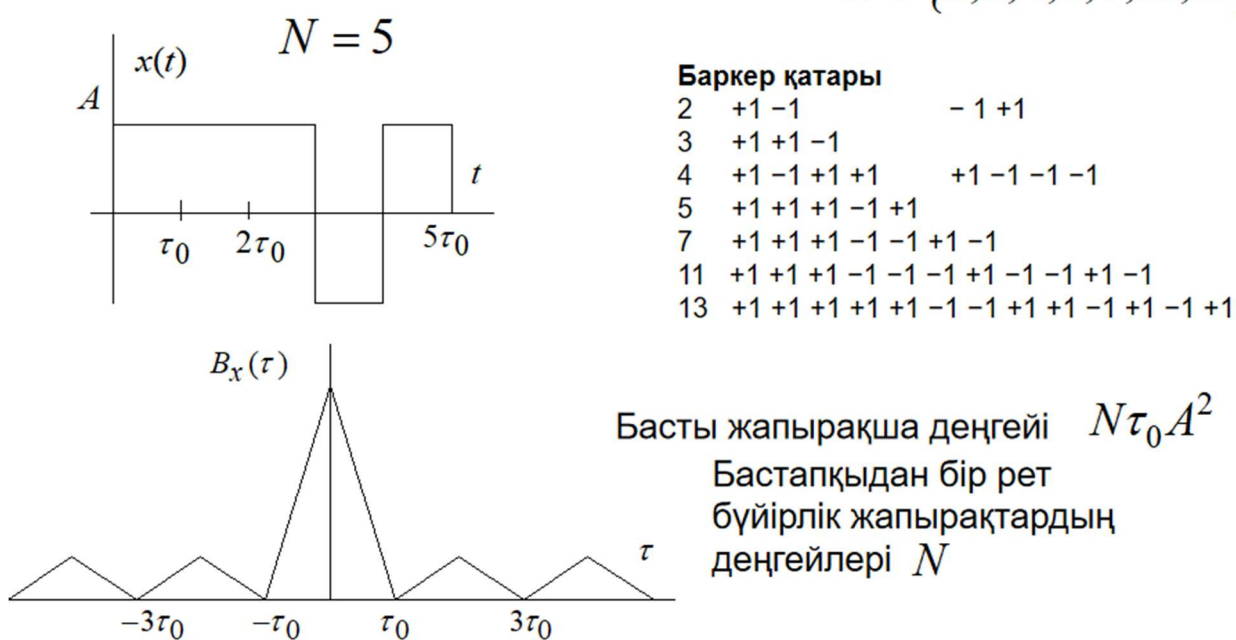
Максималды мәні
 $A^2 \tau_n$

Аратәрізді импульстің АКФ



Сигнал Баркер (“коды”)

$$N \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$$

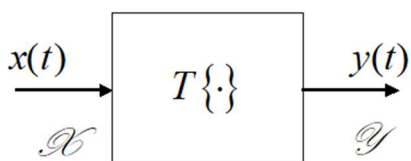


Бүйірлік жапырақшалар деңгейі $1/\sqrt{N}$

Сигналдарды түрлендіру сызықты жүйелер арқылы

Мақсатты түрлендірулер – бұл үшін жасалған құрылғыларда (тізбектерде).

Әдейі емес - мысалы, байланыс желілерінде (бұрмалау, әлсіреу және т.б.)



трансформация – кіріс сигналдар жиынын $\mathcal{X}$
 шығыс сигналдар жиынына бейнелеу $\mathcal{Y}$

Сызықты операторлар

Егер $\mathcal{R} = \mathcal{U} = L_2$ (немесе l_2)

түрлендіру оператор деп аталады.

Дербес жағдайда сүзгілеу

Оператор $\mathbb{L}\{\cdot\}$ **сызықты**, егер ол аддитивті болса -

$$\mathbb{L}\{x + y\} = \mathbb{L}\{x\} + \mathbb{L}\{y\}$$

бірқалыпты

$$\mathbb{L}\{\alpha x\} = \alpha \mathbb{L}\{x\}$$

суперпозиция принципі:

$$\mathbb{L}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha \mathbb{L}\{x\} + \beta \mathbb{L}\{y\}$$

Суперпозиция принципінің маңыздылығы!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t) \longrightarrow \boxed{\mathbb{L}\{\cdot\}} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

толығырақ:

$$y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} = \mathbb{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

спектралды коэффициенттері дәл сондай!

Бұл сызықтық тізбектерді талдаудың спектрлік әдісінің негізі болып табылады.

Сызықты оператор

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

ШЫҒЫС СИГНАЛ

$$y_k = \sum_{j=1}^N \lambda_{kj} x_j, \quad k = \overline{1, N}$$

$$\begin{aligned} e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T & \xrightarrow{\quad} (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{N1})^T \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T & \xrightarrow{\quad} (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{N2})^T \\ e_N = (0, 0, \dots, 1)^T & \xrightarrow{\quad} (\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \dots, \lambda_{NN})^T \end{aligned}$$

Сызықты тізбектерді талдау

$$y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} = \mathbb{L}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_k(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \mathbb{L}\{u_k(t)\}$$

Кіріс сигнал динамикасы

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$x(\tau) \longleftrightarrow \alpha_k \qquad \delta(t - \tau) \longleftrightarrow u_k(t)$$

Сондықтан

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbb{L}\{x(t)\} &= \mathbb{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathbb{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Сызықты тізбектерді талдау

Сызықты тізбектің шығысындағы сигнал

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

мұнда $h(t, \tau)$ - t уақытындағы тізбектің жауап беруі $\delta(t - \tau)$

$h(t, \tau) = \mathbb{L}\{\delta(t - \tau)\}$ салмақты функция.

Ең маңызды ерекше жағдай: сызықтық ығысу-инвариантты немесе сызықтық стационарлық тізбектер: салмақ функциясы шын мәнінде тек аргументтердің айырмашылығына байланысты -

$$h(t, \tau) = h(t - \tau) \quad \text{онда}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \text{Бұл - Дюамель интегралы}$$

Дюамель интегралы

осындай таңбамен кейде белгілейді *

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Айнымалыларды ауыстырып табуға да болады

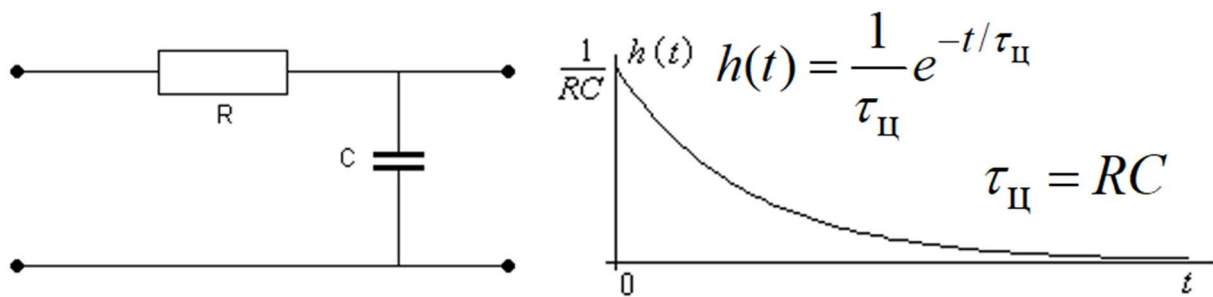
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

Осылайша, екілік операция ретінде конволюция коммутативті болып табылады

Егер $x(t) = \delta(t)$ онда

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t)$$

Мысалы тізбектің импульстік сипаттамасы



Себептілік шарты

$$h(t) \equiv 0 \text{ кезінде } t < 0$$



$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t_0 - \tau) d\tau$$

Сызықты тізбектің интегралды сипаттамасы

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

импульсті сипаттаманың
Фурье түрлендіруі

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

импульсті сипаттаманың
кері Фурье түрлендіруі

(АЖС) $|H(f)| = K(f)$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

ФЖС $\arg\{H(f)\} = \varphi(f)$

$$H(f) = K(f) e^{j\varphi(f)} \text{ әсер сигналы } e^{j2\pi ft}$$

$$H(f) e^{j2\pi ft} = K(f) e^{j[2\pi ft + \varphi(f)]}$$

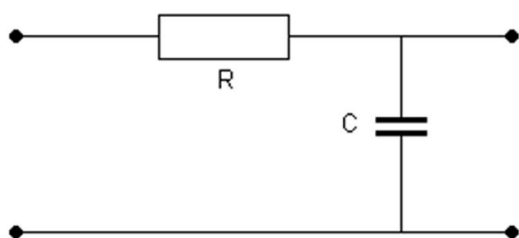
Шығыс спектрі

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

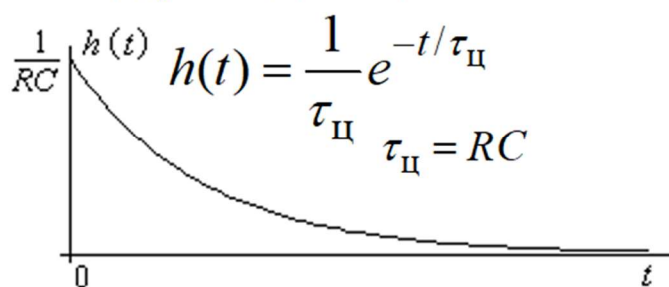
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(f)X(f)}_{Y(f)} e^{j2\pi ft} df$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

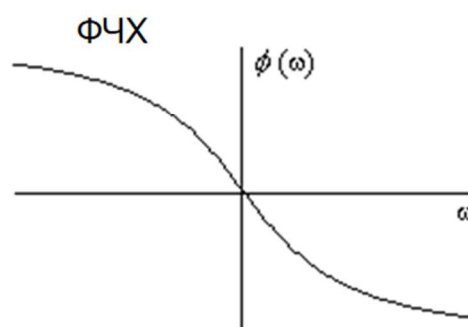
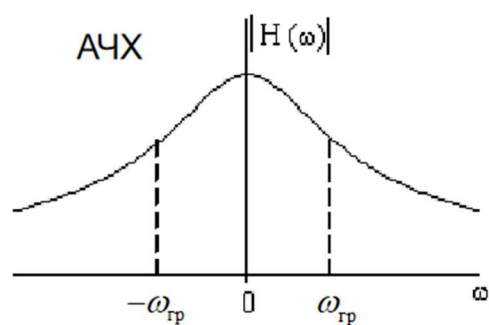
Мысалы



Импульсті сипаттама



$\omega_{гр}$ – шекті жиілік



Бақылау сұрақтары

1. Фурье тура және кері түрлендіру формуласын жазыңыз
2. Рэлей жалпылама формуласын жазыңыз
3. Парсеваль теңдігін жазыңыз
4. Гильберт түрлендіруін жазыңыз
5. Дискретті сигналдың Фурье түрлендіруін жазыңыз
6. Автокорреляциялық функция туралы қасиеттерін қоса жазыңыз
7. Сызықты жүйелер, сызықты операторлар туралы жазыңыз
8. Дюамель интегралы туралы жазыңыз
9. Сызықты тізбектің интегралды сипаттамасы және шығыс спектрі туралы жазыңыз.